Гипотеза о природе Арифметики*

И. Кулаков, random-art.ru

Математика – царица наук,
Арифметика – царица математики.
Карл Гаусс (1777-1855)

Дается качественно новый подход к представлению характеризующимся беспорядком и нестационарным поведением динамическим системам с дискретным временем, опирающийся на открытиях лежащих в основе обычной арифметики – предарифметики и ее разновидностей, способных, как подтверждается результатами исследований и экспериментом, выступать в качестве фундаментальной алгебраической, научной и технологической базы не только для более точного воспроизведения гармонии в Хаосе, перехода от природы к ее математическому описанию, и обратно, но и для несравнимо высоко эффективного перехода к существенно выраженному, по вычислительной сложности недосягаемого для воспроизведения и имитации, беспорядку.

“В любой науке столько истины, сколько в ней математики” – это часто цитируемое изречение немецкого философа Иммануила Канта (1724-1804), вероятней всего, следует понимать не только как высшую гармонию обустройства природы, но и как средство познания истины и ее совершенного воплощения в форме, через привносимые теорией аналогии.

Феноменологическая связь природы и математики не раз волновала умы человечества. В этой статье приводятся результаты, родившиеся, как, ни странно, из Хаоса – в результате многолетних исследований в области стохастических систем с дискретным временем, открывающие новые направления развития естествознания и проистекающие из них, качественно новые и еще неведомые промышленные технологии.

В первую очередь ***обратимся к классической двоичной арифметике и следующей из нее неполной арифметике*** (**random-art.ru**).

Неполная арифметика

В двоичной арифметике результат сложения g, двух n-разрядных двоичных величин $\{a,b\}$, может быть задан ***исходя из привычных правил позиционными счета*** [1], ***не одним***, ***как предписывается ими***, ***а всеми признаками переноса одновременно*** [2], а именно:

$$g = a + b = 2\cdot(a \,\&\, b) + (a \oplus b). \qquad (1)$$

Здесь и далее, знаками &, |, ⊕, ¯ обозначены известные двоичные операции **И**, **ИЛИ**, **ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ** (**XOR**) – сложение по модулю 2 и инверсия **НЕ**, соответственно, над n-разрядными двоичными величинами.

Первоначально положим $g_O = a$ и $p_O = b$. Тогда из соотношения (1) следует, что

$$g_1 = g_O \oplus p_O, \qquad p_1 = 2\cdot(g_O \,\&\, p_O), \qquad \text{при этом} \qquad g_1 + p_1 \; mod \; 2^n = a + b,$$

а двоичная переменная p, содержит все признаки переноса, формируемые по всем n двоичным разрядам, одновременно.

Далее, по индукции, на втором и каждом последующем k-ом шаге, имеем:

$$g_2 = g_1 \oplus p_1, \qquad p_2 = 2\cdot(g_1 \,\&\, p_1), \qquad \text{при этом} \qquad g_2 + p_2 \; mod \; 2^n = a + b;$$

. . . .

$$g_k = g_{k-1} \oplus p_{k-1}, \qquad p_k = 2\cdot(g_{k-1} \,\&\, p_{k-1}), \qquad \text{при этом} \qquad g_k + p_k \; mod \; 2^n = a + b;$$

При $p_k \; mod \; 2^n = 0$ $(k \le n)$, когда все признаки переноса p становятся нулевыми, имеем, что $g_k + 0 = a + b$, т. е. двоичная переменная g становится равной сумме двух, связанных двоичной операцией сложения величин.

Таким образом, из соотношения (1) следует формальное разложение операции сложения $g = a + b$ в последовательность ***k*** простейших, *равноустроенных и не выводимых* друг из друга, отвечающих фундаментальным системным принципам эквивалентности и неделимости, элементарных, параллельно исполняемых действий над двоичными разрядами числовой пары $\{g, p\}$ – результатом операции g и его n-разрядным ***<u>нелинейным дополнением</u>*** ***p***, ***образованным всеми признаками переноса***. А именно, разложение, подчиняющееся следующим рекурсивным уравнениям:

$$p_k = (g_{k-1} \,\&\, p_{k-1}) \lessdot_1 \qquad (p_{k-1} \neq 0), \qquad g_k = g_{k-1} \oplus p_{k-1} \tag{2}$$

со смещением $\lessdot_1$ на один разряд в сторону старших значащих бит при начальных условиях $p_0 = b$ и $g_0 = a$. По ходу рекурсии через $\boldsymbol{k \leq n}$ шагов дополнение $p = 0$ обращается в ноль, свойственный ординарной (классической) арифметике – $a + b = g$.

Пример выполнения операции сложения двух 32-х разрядных двоичных чисел по всем признакам переноса одновременно, показан на рис.1.

операция сложения $g = g_0 + p_0 \bmod 2^{32}$		**результат**
p_0	1010 0111 1001 1101 0100 1101 0100 1011	**2812104011**
g_0	1110 1001 1100 0110 0001 1001 0101 0111	**3922073943**
p_1	1 0100 0011 0000 1000 0001 0010 1000 0110	5419569798
g_1	0 0100 1110 0101 1011 0101 0100 0001 1100	1314608156
p_2	0 1000 0100 0001 0000 0010 0000 0000 1000	2215649288
g_2	1 0000 1101 0101 0011 0100 0110 1001 1010	4518528666
p_3	0 0000 1000 0010 0000 0000 0000 0001 0000	136314896
g_3	1 1000 1001 0100 0011 0110 0110 1001 0010	6597863058
p_4	0 0001 0000 0000 0000 0000 0000 0010 0000	268435488
g_4	1 1000 0001 0110 0011 0110 0110 1000 0010	6465742466
p_5	0 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000	0
g_5	**1** 1000 1101 0101 0011 0110 0110 1001 1010	**6734177954**

Рис. 1

Аналогично, через двойное отрицание $d = \overline{\bar{a} + b}$ согласно выражениям:

$$p_k = (\bar{d}_{k-1} \,\&\, p_{k-1}) \lessdot_1 \quad (p_{k-1} \neq 0), \qquad d_k = d_{k-1} \oplus p_{k-1}, \tag{3}$$

при начальных условиях $p_0 = b$ и $d_0 = a$, может быть вычислена разность $d = a - b$ двух величин.

Пример выполнения операции вычитания двух, используемых в примере сложения, чисел по всем признакам переноса одновременно, показан на рис.2.

операция вычитания $g = d_0 - p_0 \bmod 2^{32}$		**результат**
p_0	1010 0111 1001 1101 0100 1101 0100 1011	**2812104011**
d_0	1110 1001 1100 0110 0001 1001 0101 0111	**3922073943**
	0001 0110 0011 1001 1110 0110 1010 1000	$\bar{d}_0$
p_1	0000 1100 0011 0010 1000 1000 0001 0000	204638224
d_1	0100 1110 0101 1011 0101 0100 0001 1100	1314608156
	1011 0001 1010 0100 1010 1011 1110 0011	$\bar{d}_1$
p_2	0000 0000 0100 0001 0001 0000 0000 0000	4263936
d_2	0100 0010 0110 1001 1101 1100 0000 1100	1114233868
p_3	0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000	0
d_3	0100 0010 0010 1000 1100 1100 0000 1100	**1109969932**

Рис. 2

При ограничении общего числа шагов $\boldsymbol{k \le \delta}$, иначе ***глубины переноса*** $\boldsymbol{\delta < n}$ в выражениях (2) и (3), операции сложения и вычитания, как и следующая из них арифметика неполна.

Предарифметика и операции в ней

Неполная арифметика с минимальной глубиной переноса ($\boldsymbol{\delta = 1}$), не далее чем на разряд, получила название – ***предарифметика***.

Сложение (вычитание) в предарифметике, как следует из соотношений (2) и (3) подчиняется ряду, формируемому согласно с уравнениями:

$$P_i = ((\boldsymbol{Imp}(G_{i-1})\ \&\ P_{i-1}) \lessdot_1)\ |\ \mathbf{1}, \qquad G_i = G_{i-1} \oplus P_{i-1}\ mod\ 2^n \tag{4}$$

с функцией импликации $\boldsymbol{Imp}(c) = c$ для сложения и $\boldsymbol{Imp}(c) = \overline{c}$ для вычитания, включающим две двоичные переменные $\{G,P\}$ – n-разрядную базу операции G и ее $(n+1)$-разрядное нелинейное дополнение P, путем прибавления (вычитания) единицы $\mathbf{1}$, фиксируемой в младшем разряде дополнения P, начиная с начальных значений $\{G_O,P_O\}$.

Из результатов $\{G_i,P_i\}$ прибавления (вычитания) единицы в предарифметике, согласно выражениям (2) и (3), при $p_O = P_i$ и $\{g_O,d_O\} = G_i$, следуют результаты $\{g,d\} = G_i \pm P_i$ сложения (вычитания). Причем указанные результаты $\{g, d\}$, как предписывается элементарной теорией чисел и ординарной арифметикой [1,3], на каждой очередной итерации i в точности соответствуют результатам c_i работы элементарного инкрементного или декрементного n-разрядного счетчика $c_i = c_{i-1} \pm 1$, соответственно, начиная с начального значения $c_O = G_O \pm P_O$. В силу естественного усечения результата со стороны старших разрядов, операция $mod\ 2^n$ в приводимых формулах опускается.

На рис.3 и рис.4 приведены ряды, полученные при нулевых начальных условиях $P_O = 0$ и $G_O = 0$, составленные из упорядоченных пар (G_i,P_i), *представляющих собой бинарные отношения*, задающие операцию сложения и вычитания в предарифметике, и результаты операций сложения g с единицей и ее вычитания d в 4-х разрядной двоичной арифметике.

По отношению к предарифметике и арифметике, может быть введена и двойственная по отношению к ним комплементарная предарифметика и арифметика.

Сложение (вычитание) в комплементарной предарифметике подчиняется ряду, следующему из соотношений (4) и комплементарного свойства $a\ |\ b = \overline{\overline{a}\ \&\ \overline{b}}$, формируемому при $P' = \overline{P}$ и $G' = \overline{G}$ согласно с уравнениями:

$$P'_i = (\boldsymbol{Imp}(G'_{i-1})\ |\ P'_{i-1}) \lessdot_1, \qquad G'_i = \overline{G'_{i-1} \oplus P'_{i-1}}\ mod\ 2^n, \tag{5}$$

начиная с начальных значений $\{P'_O,G'_O\}$. Причем, из базы G'_i и ее нелинейного дополнения P'_i следуют результаты $\{\overline{g},\overline{d}\} = \{g', d'\} = \overline{G'_i \pm P'_i}$ сложения (вычитания) в комплементарной арифметике, с точностью до инверсии совпадающие с результатами сложения (вычитания) в ординарной арифметике, за исключением дополнения P', которое в отличие от упомянутого в (2) и (4) минимально возможного, нулевого, всюду принимает максимально возможное значение $P' = 2^n - 1 = \overline{0}\ mod\ 2^n$.

На рис.5 и рис.6 приведены ряды, полученные при нулевых начальных условиях $P'_O = 0$ и $G'_O = 0$, составленные из упорядоченных пар (G'_i,P'_i), задающих операцию сложения и вычитания в комплементарной предарифметике, и результаты операций сложения g' с единицей и ее вычитания d' в 4-х разрядной комплементарной арифметике.

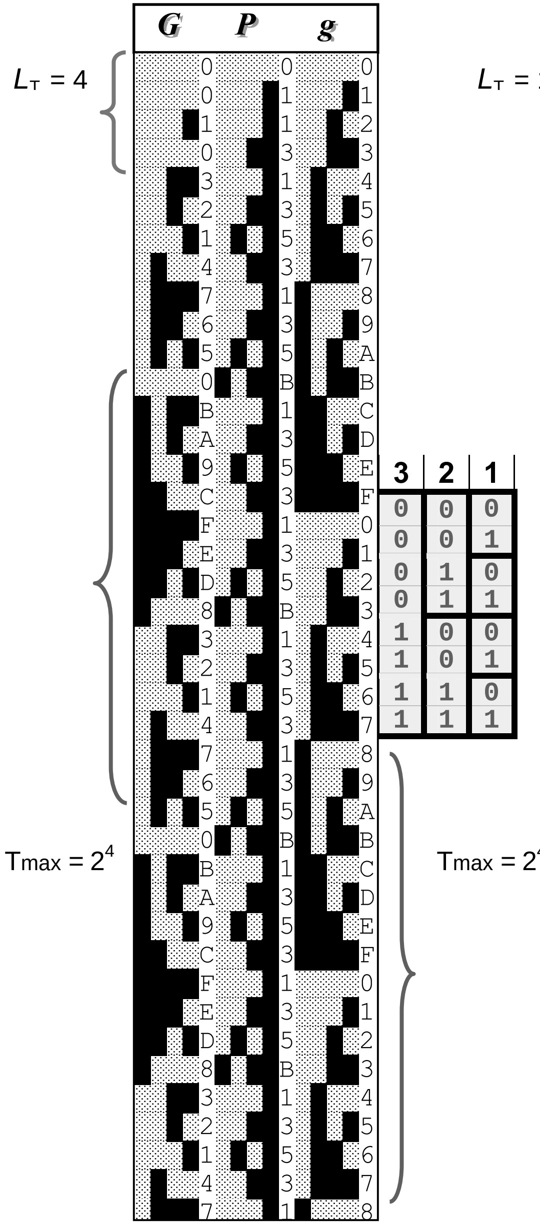

Рис. 3

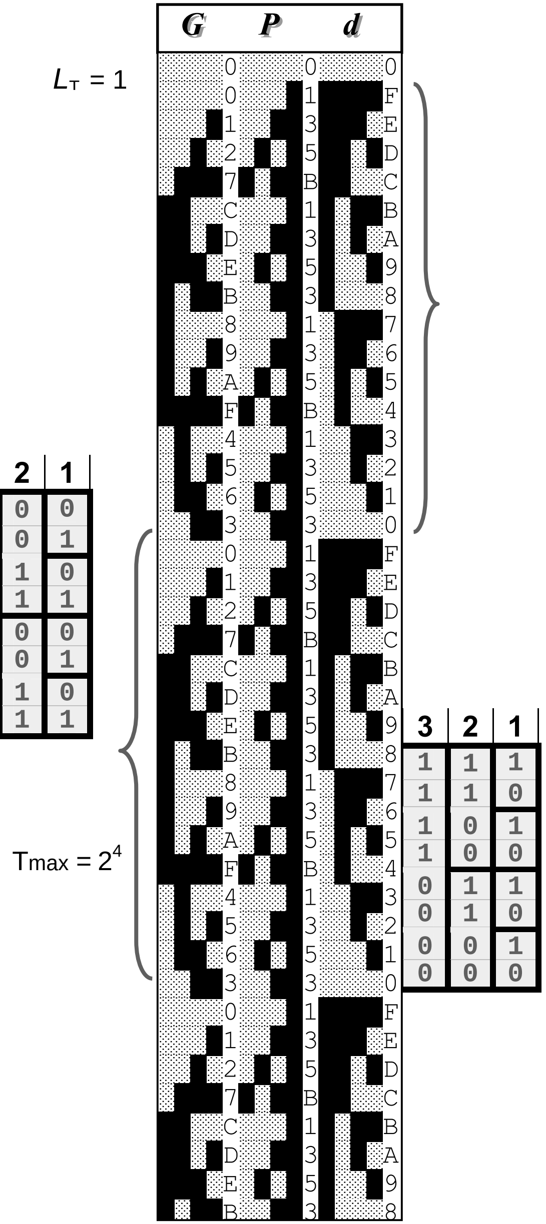

Рис. 4

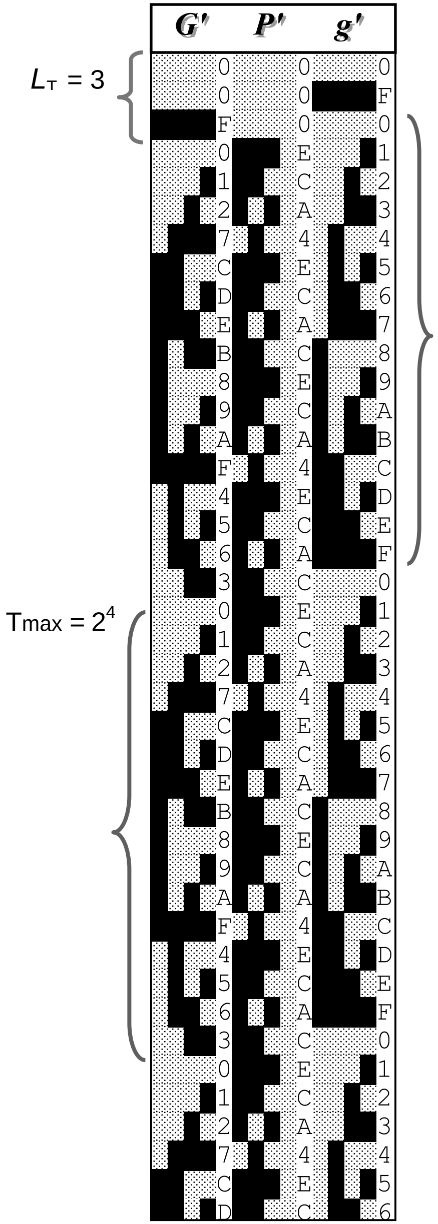

Рис. 5

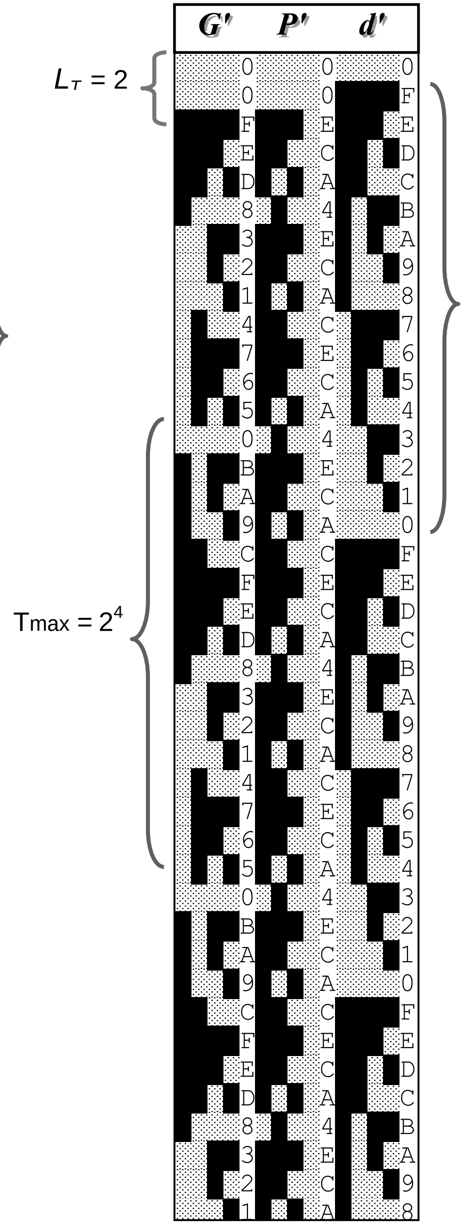

Рис. 6

<u>По определениям</u> (2) - (5) в неполной арифметике и предарифметике ***дополнение р составляет неотъемлемую часть операций***, ***не имеет самостоятельного назначения***, ***носит строго выраженный нелинейный характер***, ***не вырождается в константу и не исчезает***, как это имеет место в следующих из них ординарной и комплементарной ей арифметике, при глубине переноса $\delta = n$, равной n разрядности чисел.

Нестационарные процессы и саморегуляция

В приведенных двух предарифметиках, задаваемых уравнениями (4) и (5), в последнем штрихи опускаются, в отличие от арифметик, возможно наличие зависящего от начальных условий переходного нелинейного участка, длиной $L_T \le n$, после прохождения которого базовая переменная G, благодаря феноменальной саморегуляции ее и ее ***нелинейного дополнения*** P, ***достигает максимального периода*** 2^n и далее всюду, в границах каждого из последующих периодов, несмотря на ошибочные, как не редко бывает, не проверенные и не аргументированные утверждения об ином, ***<u>ведет себя стационарно и бесповторно</u>*** (***<u>апериодично</u>***), что демонстрируется на рис.3- рис.6. Наличие такого нестационарного переходного участка (аттрактора), самоисчезающего по мере формирования последующих элементов последовательностей задаваемых уравнениями (4) и (5), существенно отличается от подобных участков (предпериодов), наблюдаемых при генерации периодических последовательностей на основе рекуррентных подходов [3], а также поведением на этих участках, как правило, ведущим к трудно предсказуемому, нестабильному поведению генераторов, а в особых случаях и к их полному вырождению.

Кроме того, число таких разнообразных последовательностей равно 2^n, а не 2^{2n}, как можно было бы ожидать исходя из всего разнообразия начальных условий $\{G_O, P_O\}$, и по существу определяется исходя из всевозможных значений начального элемента $G_{iO} \in \{G_i\}$ и строго приданного ему элемента $P_{iO} \in \{P_i\}$. Иными словами, упомянутый выше ***процесс саморегуляции*** не дается бесплатно и ***<u>приводит к строгой взаимозависимости</u> базы G и ее дополнения P***.

Ко всему, выражения (4) и (5) допускают параллельную обработку по каждому из разрядов со скоростью, соизмеримой со скоростью исполнения одной логической операции **XOR** и тем самым заметно превышает скорость выполнения операций сложения и вычитания.

В общем случае совершенно неочевидно и необязательно, что система и ее составляющие будут развиваться указанным выше образом, как предписывается уравнениями (4) и (5). Иное развитие, по сути, означает иное *движение*, иную *предарифметику*, а с ними и иную *арифметику* и ***сопровождающуюся переходными процессами <u>нестационарную динамику поведения</u>***.

К этому, изменение дополнения P в предарифметике, показанное на рис.3 и рис.4, с точки зрения физики поведения динамических систем, как видно по его первым разрядам, характеризует источники, стремящиеся к стационарному состоянию на переходном участке $L_T \le n$. По ходу наращивания итераций переходной участок исчезает, а базовая переменная G самосинхронизируется и достигает максимального периода $T_{max} = 2^4$.

В свою очередь, изменение дополнения P в комплементарной предарифметике, показанное на рис.5 и рис.6, в противоположность источникам, относится к стоку.

Дихотомические последовательности

Обращаясь к эпюрам рис.3 и рис.4 двоичного представления значений, полученных по результатам работы 4-х разрядных арифметических счетчиков $\{g, d\}$ с приращением ±1, можно увидеть, что распределение значений битов этих последовательностей, составленных из 2^4 элементов обладает иерархической структурой типа двоичного дерева, состоящей по числу разрядов из 4-х уровней.

На рис.3 и рис.4 в выделенных фрагментах показаны примеры заполнения таких 3-х уровневых двоичных структур на основе реализаций полученных по числовым рядам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, соответственно. Причем, изменения значений k-го разряда носят частотно регулярный характер с периодом повторения $T_k = 2^k$ и при этом принимаемые k-м разрядом значения, принадлежащие одному уровню k и разделенные полупериодом $T_k/2$, комплементарны, т.е. связаны одноразрядной операцией инверсии **НЕ** между собой. Появление таких гармоник (рис.7), особенно в свете дошедших из глубокой древности представлений о гармоническом устройстве природы, уже сам по себе удивительный факт.

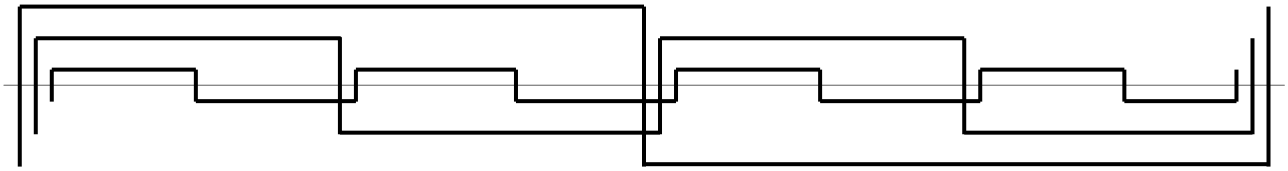

Рис. 7

Кроме того, там же можно заметить, что такой же иерархической структурой и такими же свойствами обладают после прохождения переходного участка и все последующие последовательности G. Более того, такой структурой и свойствами наделены все последовательности, нередко используемые для генерации псевдослучайных чисел, формируемые на основе линейного (смешанного) конгруэнтного метода [1,4] с n-разрядной двоичной переменной X, задаваемого линейным уравнением:

$$X_i = a \cdot X_{i-1} + b \ mod\ 2^n, \tag{6}$$

при $a \equiv 1 (mod\ 4)$ и нечетном b. Кардинальное число $card\,X$ множества всех таких различных последовательностей с учетом начальных условий X_0, равно $2^{3\,(n-1)}$.

Заметим, линейный (смешанный) конгруэнтный метод (6) носит неполный характер и допускает простое развитие:

$$X'_i = a' \cdot (X'_{i-1} \oplus h') + b' \ mod\ 2^n, \tag{7}$$

при $a' \equiv 3 (mod\ 4)$, нечетном h' и четном b', с кардинальным числом $card\,X'$, равным $2^{4\,(n-1)}$.

Принимая во внимание сказанное, данные результаты допускают следующее естественное обобщение [5].

Двоичная последовательность $D = \{d_i : i = \overline{1, T_n}\}$ называется ***дихотомической*** или ***Dh-последовательностью***, если частотные изменения значений каждого его k-го двоичного разряда носит регулярный характер, при котором любая из подпоследовательностей, образованная из элементов исходной последовательности путем исключения $D\,mod\,T_k$ их $n-k \in [0, n-1]$ старших разрядов, имеет период повторения $T_k = 2^k$ и в пределах его не содержит одинаковых элементов, т.е. ***обладает свойствами апериодичной последовательности***.

Другими словами, распределение значений последовательности D, составленной ровно из T_n элементов $d_j \in D$, обладает иерархической структурой типа двоичного дерева, состоящей из n уровней $k \in [1, n]$ и $m_k = T_n / T_k$ взаимно непересекающихся на этих k уровнях, идентичных *дихотомических классов* $D_k \equiv D\ (mod\ T_k)$, при этом любая одноразрядная двоичная пара $\{d_{ki}, d_{ki+T_k/2}\}$ ее i и $i+T_k/2$ элементов ($i = \overline{1, T_n - T_k/2}$), разделенных полупериодом $T_k/2$, комплементарна, т. е. $\overline{d_{ki}} = d_{ki+T_k/2}$.

Двоичные величины, обладающие указанными свойствами, именуются *дихотомическими величинами*, а возникающий при этом порядок - *дихотомическим порядком*. По индукции, следуя с первого уровня до последнего, легко показать, что нарушение условий комплементарности, влечет нарушение условий апериодичности.

Дихотомический порядок, порождаемый счетчиком $g_i = g_{i-1} + 1$, представленный на рис.3, называется ***<u>идеальным</u>***. Верно и обратное. ***Идеальный дихотомический порядок***, как и введенные Р.Дедекиндом (1888) и Д.Пеано (1889) аксиомы построения арифметики натуральных чисел [3], ***задает <u>операцию сложения</u>, а обратный к нему, <u>операцию вычитания</u>!***

Принимая во внимание этот факт, для дальнейшего важно отметить, что ***<u>дихотомический порядок</u>*** не только задает арифметику, но и по отношению к упомянутым аксиомам ***носит не только абстрактный***, ***но и конкретный*** (***предметный***) – ***универсальный характер***.

Представление дихотомических последовательностей

Перебирая поразрядно полупериоды всех дихотомических классов, порождаемых арифметическим счетчиком $D_i = D_{i-1} + E \; mod \; 2^n$ по всем ограниченным полупериодом начальным условиям и возможным приращениям E, можно определить кардинальное число $card D$ множества всевозможных различных Dh-последовательностей:

$$card\,D = 2^{2^{1-1}-1} \cdot 2^{2^{2-1}-1} \cdot 2^{2^{3-1}-1} \ldots \cdot 2^{2^{n-1}-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{1} = 2^{2^n-1}. \tag{8}$$

Как показали исследования [5], вызываемое самосинхронизацией и наблюдаемое после прохождения нелинейного переходного участка стационарное поведение можно представить формально – математическим рядом с использованием привычных арифметических действий.

В частном случае уравнение формирования Dh-последовательностей можно задать следующим рекуррентным выражением:

$$X_i = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x_{k(i-1)} 2^{k-1} \; mod \; 2^n \qquad (x_{k(i-1)} \in 0,1),$$

где a_0, a_k - нечетные постоянные коэффициенты, приращение и множители из интервалов $[1,2^n - 1]$ и $[1,2^{n-k+1} - 1]$ соответственно и условии $a_1 \equiv 1(mod\,4)$. Кардинальное число $card X$ множества всех таких различных Dh-последовательностей, по отношению линейным конгруэнтным последовательностям (6) уже достаточно велико и равно $2^{n(n+1)/2-1}$. Аналогично линейному конгруэнтному методу, указанный метод допускает развитие:

$$X'_i = a'_0 + \sum_{k=1}^{n} a'_k \bar{x}'_{k(i-1)} 2^{k-1} \; mod \; 2^n \qquad (x'_{k(i-1)} \in 0,1),$$

при четном a'_0 и нечетных коэффициентах $a'_k \in [1,2^{n-k+1} - 1]$ и условии $a'_1 \equiv 3(mod\,4)$. Кардинальное число $card X$ множества всех таких различных Dh-последовательностей также равно $2^{n(n+1)/2-1}$. Общее кардинальное число $card X$ равно $2^{n(n+1)/2}$ и совпадает с кардинальным числом, полученным путем перемножения периодов:

$$card\,X = 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \ldots 2^1 \cdot 1 = 2^{n(n+1)/2}.$$

В итоге, руководствуясь указанными положениями, уравнение формирования Dh-последовательностей может быть задано следующим рекуррентным выражением:

$$X_i = (a_0 \oplus h_0) + \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1)_{i-1} 2^{k-1} \; mod \; 2^n \qquad (x_{k(i-1)} \in 0,1), \tag{9}$$

при нечетном n-разрядном приращении a_0 и коэффициенте a_1, модификаторе h_0, равном 0 или 1, и суперпозиции [3] одночленов (мономов), равной:

$$A_k(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1) = x_k + \sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} a_{i_1,\ldots,i_{k-1}} x_1^{i_1} \cdot \ldots x_{k-1}^{i_{k-1}} \qquad (k > 1,\; i_{k-1} \in 0,1)$$

и мономе $A_1 = (a_1 + 2 \cdot h_0) \cdot (x_1 \oplus h_0)$, $a_1 \equiv 1(mod\,4)$, где $\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})} a_{i_1,\ldots,i_{k-1}} x_1^{i_1} \cdot \ldots x_{k-1}^{i_{k-1}}$ означает суммирование по всем различным сочетаниям одноразрядных переменных $\{x_k\} \in X$, числом $2^{2^{k-1}}$.

Суммирование по всем мономам, начальным условиям и приращениям дает кардинальное число $card X = 2^{2^n - 1}$ множества всех таких различных Dh-последовательностей.

Совпадение кардинальных чисел $card\,X = card\,D = 2^{2^n - 1}$, свидетельствует, что ***любая из возможных Dh-последовательностей <u>может быть единственным образом</u> выражена через коэффициенты уравнения*** (9).

Как видим, число всевозможных *Dh*-последовательностей, даже при небольших *n*, необъятно огромно и охватывает гармоничные, упорядоченные процессы и существенно неупорядоченные, хаотичные процессы. В последнем случае закон распределения изменений в старших разрядах быстро стремится к идеальному равномерному.

В общем, описание и тем более формирование *Dh*-последовательностей, представленных уравнением (9), является громоздким и сложным, что делает данный подход непригодным для исследований и для практики. Вместе с тем, биноминальный и нелинейный характер коэффициентов уравнения (9), по экспоненциально высокому числу вариантов представления каждого из них, равным $2^{2^{n-(k-1)}}$, в общем, по сложности соизмеримой с решением системы нелинейных уравнений размерностью, порядка $2_{n/2}^{n\cdot(m+1)}$, при числе параметров m, прямо ***указывает на возможность получения порядка*** $2^{2^{n/2}}$ ***статистически значимых Dh-последовательностей***, ***с <u>недосягаемой мерой сложности</u> их аналитического и вычислительного воспроизведения и имитации***. В академическом, нежели чем в практическом плане, исключение в очень ограниченных случаях составляют ряды, свойственные конгруэнтному методу [1,4,5,6], а в самом простом случае, линейному (смешанному) конгруэнтному методу по модулю 2^n (6) и (7).

По существу, комплексно разрешить эту проблему и довести описание и формирование *Dh*-последовательностей, равно и получаемых на их основе псевдослучайных последовательностей, до приемлемых мер сложности и эффективного практического результата оказалось возможным исключительно на основе введения предарифметики. Вместе с тем, необходимо отметить, что кроме вычисления максимальной длины переходного участка, другие, не влияющие на достижение общего результата задачи точного описания нестационарного, самосинхронизирующего нелинейного поведения в предарифметике пока еще не достаточно решены.

Предарифметика и динамические системы

Взаимная эквивалентность (изоморфизм) физики и математики позволяет распространить указанные результаты на происходящие в природе физические явления и процессы. Из этого, если следовать гипотезе о потенциально конечной скорости распространения взаимодействий, неминуемо вытекает, что операция сложения (вычитания) и производные от них арифметические действия, будучи развернуты во времени, не могут реализоваться мгновенно, сопровождаются нелинейными переходными процессами вызываемыми изменением ***<u>индукционной составляющей</u> P****, отражаемой привносимым предарифметикой дополнением *P*. Причем, индукционная составляющая *P** и дополнение *P*, за счет входящих в состав уравнений (4) и (5) операций конъюнкции и дизъюнкции, носят явно выраженный ***нелинейный характер***

В следующую очередь к этому можно добавить, ***несущий <u>новую алгебраическую базу</u>***, дихотомический – ***универсальный порядок***, двоичные решетки, фракталы и прочие, близкие к ним аналогии.

Ко всему, как видно по результатам расчетов, представленных на рис.3-рис.6, характер изменения дополнения и базовой переменной *Dh*-генераторов существенно отличаются между собой. Для исследования $(n+1)$-разрядного, нелинейного по существу, дополнения *P*, (отметим, что его период равен 2^n), следует воспользоваться свойством, в соответствии с которым редуцированная к нему прямая $\boldsymbol{G}^+$, характеризующая источники – $p_1 = 1$ ($p_1 \in P$), и инверсная, характеризующая стоки – $p_1 = 0$, последовательность $\boldsymbol{G}^-$, ***<u>равная сумме</u> ее элементов***:

$$G^+_i = G^+_{i-1} \oplus P_i \qquad (G^+_0 = P_0), \qquad G^-_i = G^-_{i-1} \overline{\oplus}\, P_i \qquad (G^-_0 = P_0),$$

соответственно, есть *Dh*-последовательность с периодом повторения $T_{max} = 2^{n+1}$. Разнообразие редуцированных последовательностей к нелинейному дополнению *P*, как для источников, так и для стоков, заметно богаче и измеряется кардинальным числом $card\, G^{\pm} = 2^{2^{n+1}} - 1$.

С другой стороны, редуцированная прямая $\boldsymbol{P}^{+}$ или инверсная последовательность $\boldsymbol{P}^{-}$ к базовой переменной *G*, ***равная разности*** ***ее элементов***:

$$P^{+}_{i} = G_i \oplus G_{i-1}, \qquad P^{-}_{i} = G_i \overline{\oplus}\, G_{i-1},$$

конгруэнтна последовательности, порождаемой нелинейным дополнением *P* с периодом повторения 2^{n-1}.

Иными словами, ***имеет место феноменологический взаимный переход от нелинейной последовательности к дихотомической и от дихотомической последовательности к нелинейной***, при этом *Dh*-последовательность носит своего рода интегральный, а дополняющая ее нелинейная – дифференциальный характер.

Все эти факты дают серьезные основания по-новому отнестись к арифметическим действиям и арифметике в целом.

Выводы и заключение

Из всего этого, подкрепляемая приводимыми фактами и результатами, ***вытекает гипотеза*** «**О природе Арифметики**», согласно которой, реальные системы, как следует из изоморфизма, наделены двойственной универсальной структурой, и по ходу развития и переходу от нестационарного к стационарному поведению, или формально, по мере прохождения от предарифметики, через неполную арифметику к полной, претерпевают качественные изменения, феноменальным образом самосинхронизируются и со стабилизацией (исчезновением) нелинейной индукционной составляющей $\boldsymbol{P^*} = \boldsymbol{const}$, достигают своего равновесия (стационарного) состояния и развиваются далее по наблюдаемым в эксперименте известным физическим законам.

Ординарная (4) и комплементарная ей (5) предарифметика допускает развитие. По аналогии с гармоническими процессами к ним можно добавить две линейные волновые, характеризующие истоки и стоки предарифметики, а к ним еще четыре дополняющих их нелинейные. ***Все типы предарифметик*** сведены в нижеследующую таблицу:

Таблица 1

ПРЕДАРИФМЕТИКА	Линейная	Нелинейная
Конъюнктивная	$z = (Imp(G) \,\&\, P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = G \oplus P$; $P = z \mid 1$.	$z = (Imp(G) \,\&\, P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = G \oplus P$; $P = \neg z$.
Дизъюнктивная	$z = (Imp(G) \mid P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = \neg (G \oplus P)$; $P = z$.	$z = (Imp(G) \mid P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = \neg (G \oplus P)$; $P = \neg (z \mid 1)$.
Конъюнктивная волновая	$z = (Imp(G) \,\&\, P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = \neg (G \oplus (P \oplus 1))$; $P = \neg z$.	$z = (Imp(G) \,\&\, P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = \neg (G \oplus (P \oplus 1))$; $P = z \mid 1$.
Дизъюнктивная волновая	$z = (Imp(G) \mid P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = G \oplus (P \mid 1)$; $P = \neg (z \mid 1)$.	$z = (Imp(G) \mid P) \lessdot_1 \bmod 2^n$; $G = G \oplus (P \mid 1)$; $P = z$.

Для упрощения записи, индексы i в левой и $i-1$ в правой части указанных в Таблице 1 формул опущены. Кроме этого, под знаком $\neg$ также подразумевается унарная поразрядная операция инверсии битов $\overline{}$ (**НЕ**).

Посредством сложения и вычитания $\{g, d\} = G_i \pm P_i$ пар (G_i, P_i) по формулам (2) и (3), из предарифметик, следуют арифметики, а через двойное отрицание $\{g, d\} = \overline{\overline{G}}_i \pm \overline{\overline{P}}_i$, следуют им комплементарные арифметики.

Предарифметики положены в основу построения представляющего стохастические технологии, ***регулярного и нерегулярного***, в отличие от регулярного охваченного внутренними и внешними обратными связям, ***рандомизационного метода*** (**random-art.ru**).

Регулярный рандомизационный метод предназначен для формирования *Dh*-последовательностей, посредством дихотомических генераторов, с периодом повторения 2^n. В свою очередь, *Dh*-генераторы могут быть взаимосвязаны между собой и способны ***образовывать сети и композиции любой сложности***, и служат основой для построения высококачественных генераторов случайных чисел и стохастических систем дискретного времени различного назначения. Нерегулярный рандомизационный метод более широк и по своим свойствам и статистическим показателям вплотную примыкает к идеальному Хаосу и истинно случайным процессам.

Хотя это направление, представляющее существенно выраженный беспорядок, в отличие от систем динамического хаоса с непрерывным временем, еще очень молодо, но между тем уже не менее хорошо развито и проверено, а также доведено до схемотехнических решений, необходимых для изготовления высокорентабельных промышленных образцов, по статистическим, функциональным и техническим показателям, недостижимо далеко опережающим все известные на сегодня аналоги, и в первую очередь наиболее распространенные аналоги, построенные на основе полей Галуа (Galois,1832).

В отношении гармонии в Хаосе, представляемой арифметиками и неполными арифметиками, как видится, природа, физика и математика еще более тонко устроены, нежели так, как мы их себе сейчас представляем. Точно ответить на эти не простые вопросы, поможет время и эксперимент.

В итоге, на основании проведенных исследований и полученных результатов, в отличие от известных мировоззрений и подходов, ***представляется, что Хаос, в истинном смысле своего содержания, не есть нечто трансцендентальное***, а подчинен строгим законам, согласующимся с алгебрами, арифметикой и математикой в целом. В этом смысле арифметика делает новый шаг, с введением предарифметики приоткрывая новые горизонты.

Принятие существования предарифметик и привносимого ими развития алгебры и теории динамических систем позволит, не затрагивая накопленные фундаментальные научные знания, существенно обогатить математику, а вместе с ней проникнуть на более тонкие уровни физического описания мира, поможет глубже раскрыть и понять существующие, пока еще необъяснимые или спорные с точки зрения современной науки природные явления и феномены.

И в заключении, приведем ***требующие к себе особого внимания и отношения факты***, следующие из предполагаемой «**Природы Арифметики**» и содержания статьи:

1. В отличие от бытующих представлений и принятых правил, арифметические действия (сложение и вычитание) нетривиальны и дают абсолютно точные результаты только в случаях, если эти действия не связаны с временем, равно, при совершенно непонятном предположении, происходят мгновенно. В других случаях – это процесс, привносимые эффекты которого, мы не замечаем, игнорируем или приписываем феноменам.

2. Арифметике предшествует предарифметика. Предарифметика тривиальна, неразложима на элементарные составляющие и претендует в разделе Высшая арифметика на лидирующую и фундаментальную роль.

3. Из предарифметики следуют и другие ее разновидности, а с ними и новые арифметики, волнового или корпускулярного типа, связанные с источниками или стоками.

4. Предарифметики и следующие из них арифметики наделены универсальной структурой и порядком, именуемыми дихотомическими. А с этим, как следует из изоморфизма, нечто подобной структурой и порядком должна быть наделена и Природа.

5. В арифметике дихотомический порядок идеален, а в предарифетиках носит хаотичный характер.

6. В предарифметиках поставленная в соответствие результату операции (сложения и вычитания) базовая переменная неразрывно связанна со своим дополнением – двойственной к ней индукционной составляющей. Все действия в предарифметике выполнятся за один акт, сопровождаемый дискретными локальными и нелокальными переходами.

7. Дополнение (индукционная составляющая) носит строго выраженный нелинейный характер, не вырождается в константу и не исчезает, как это имеет место в обычной арифметике.

8. Течение процессов в предарифметике сопровождается коротким, зависящим от начальных условий переходным нестационарным участком (аттрактором).

9. По мере прохождения переходного участка, поставленная в соответствие процессу базовая переменная и ее нелинейное дополнение феноменальным образом самосинхронизируются, достигают максимального периода повторения и далее всюду, в границах каждого из последующих периодов, ведут себя стационарно и бесповторно. При этом последовательность, порождаемая базовой переменной, приобретает особый дихотомический порядок и свойства, число представлений которого невероятно огромно.

10. В предарифметиках имеет место феноменологический взаимный переход от нелинейной последовательности, представляемой дополнением базовой переменной, к дихотомической и от дихотомической последовательности к нелинейной, при этом в результате такого взаимного перехода, дихотомическая последовательность носит интегральный, а дополняющая ее нелинейная – дифференциальный характер.

Как видим, предарифметикам, самим по себе прямо, ***а не <u>опосредованно</u> через арифметику*** и вне зависимости от чего-либо другого, присущи широко представленные в физике и наблюдаемые в экспериментах, присущие природе, материи, явлениям и процессам уникальные свойства. Перечень свойств можно было бы, и продолжить, но это оставим на будущее.

На это время, несущие с собой новую алгебраическую базу предарифметики послужили ***основой <u>инновационного прорыва</u>*** в области стохастических систем с дискретным временем и представляемых ими стохастических технологий, характеризуемых существенно выраженным хаотическим поведением, присущим истинно случайным процессам (**random-art.ru**).

С введением предарифметики предстоит многое переосмыслить и на многое посмотреть по другому. На очереди нелинейная динамика и процессы, относящиеся к гармонии в Хаосе.

1. Кнут Дональд Э. «ИСКУССТВО ПРОГРАММИРОВАНИЯ», Третье издание, Том 1-2, М.: Издательский дом “Вильямс”, 2002.
2. Weller C. W. «A High-Speed Carry Ckt. For Binary Adders». IEEE Trans. On Computers vol. C-18, No.8, Aug. 1969, pp. 728-732.
   Schwartz S. A. «Single Line Propagation Adder and Method for Binary Addition». **US Patent**, 4,152,775, May 1, 1979.
   Bernard J. «Method and Structure for Providing Fast Propagation of a Carry Signal in a Field Programmable Gate Array». **US Patent**, 5,629,886, May 13, 1997.
3. Глухов М. М., Елизаров В. П., Нечаев А. А. «АЛГЕБРА». М.: Гелиос АРВ, 2003.
4. Greenberger M. Notes on a New Pseudo-Random Number Generator. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1960.
5. Кулаков И.А. «Дихотомические последовательности и их свойства». Рукопись статьи. Москва, декабрь 2011.
6. Brickell et al. A Surkey of Recent Results, Proc. of the IEEE, Vol. 76, no. 5, May 1988.